Problema 4.1ver1

El circuito de la figura 4.1.1 es un filtro paso banda, cuya expresión normalizada es de la forma:

$$H(jf) = H_{OBP} \frac{\frac{j}{Q}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{j}{Q}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

a) Calcule los parámetros del filtro: H_{OBP}, Q y f_o.
b) Dibuje (a mano alzada), de forma aproximada, la función anterior, indicando los diferentes valores del filtro (H_{OBP}, Q y f_o) en la gráfica.
c) Determine cuál es la máxima Q que se puede obtener con esta topología de circuito. A la vista del resultado, indique si es un filtro de banda ancha o de banda estrecha.

Solución:

Como se ha determinado en el problema 4.1: página 141, la función de transferencia global del sistema es:

$$H(j\omega) = \frac{v_{out}}{v_{in}}(j\omega) = \frac{j\omega RC_1}{(1+j\omega RC_1)\cdot(1+j\omega RC_2)} = \frac{j\omega RC_1}{1-\omega^2 R^2 C_1 C_2 + j\omega R(C_1+C_2)}$$

Puede observarse que los términos en ***j*** del numerador y denominador no son iguales, y por tanto, la expresión no puede identificarse tal como está con la expresión normalizada de un filtro de paso banda.

No obstante, podremos proceder a la identificación, si multiplicamos numerador y denominador por la siguiente expresión:

$$\frac{(C_1+C_2)}{(C_1+C_2)}$$

Con todo ello, se obtiene:

$$H(j\omega) = \frac{v_{out}}{v_{in}}(j\omega) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot \frac{j\omega R(C_1 + C_2)}{\left[1 - \omega^2 R^2 C_1 C_2 + j\omega R(C_1 + C_2)\right]}$$

Por lo que ya podemos identificar términos:

$$H_{OBP} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

$$\frac{1}{\omega_0^{\ 2}} = R^2 C_1 C_2 \qquad \rightarrow \qquad \omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}}$$

$$\frac{1}{Q\omega_0} = R(C_1 + C_2) \qquad \rightarrow \qquad Q = \frac{1}{\omega_0 R(C_1 + C_2)}$$

Sustituyendo en Q el valor de ω_0, se obtiene:

$$Q = \frac{1}{\dfrac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}} \cdot R(C_1 + C_2)} = \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{C_1 + C_2}$$

b) En la figura 4.1.2bis podemos ver de forma aproximada la función anterior:

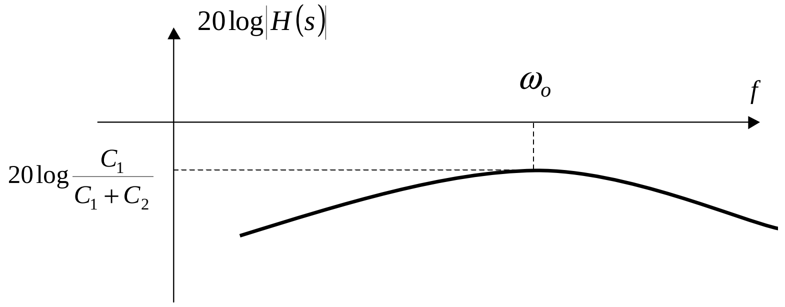

Figura 4.1.2bis

c) Para el cálculo de la máxima Q que podemos obtener con esta topología, calcularemos la derivada de Q respecto a C_1. Note que el factor de calidad, Q, no depende de la frecuencia.

$$\frac{\delta Q}{\delta C_1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{C_2}{\sqrt{C_1 C_2}} \cdot (C_1 + C_2) - \sqrt{C_1 C_2}}{(C_1 + C_2)^2}$$

La condición de máximo o mínimo es:

$$\frac{\delta Q}{\delta C_1} = 0$$

Igualando el numerador a cero:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{C_2 (C_1 + C_2)}{\sqrt{C_1 C_2}} - \sqrt{C_1 C_2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot C_2 (C_1 + C_2) - C_1 C_2 = 0$$

Operando y agrupando términos:

$$\frac{1}{2} \cdot C_1 C_2 + \frac{1}{2} C_2^2 - C_1 C_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot C_2 - \frac{1}{2} C_1 = 0$$

Finalmente:

$$C_1 = C_2$$

Mediante la segunda derivada, podemos comprobar que estamos ante el máximo valor de Q, y dado el resultado anterior, donde C_1=C_2=C:

$$Q_{max} = \frac{C^2}{2C} = \frac{1}{2}$$

Podemos ver que cuando no se cumple la condición $C_1 = C_2$, el factor Q es menor del máximo:

1) $C_1=2C_2$

$$Q=\frac{\sqrt{2C_2C_2}}{2C_2+C_2}=\frac{\sqrt{2}C_2}{3C_2}=\frac{\sqrt{2}}{3}<\frac{1}{2}$$

2) $C_2=2C_1$

$$Q=\frac{\sqrt{C_1 2C_1}}{C_1+2C_1}=\frac{\sqrt{2}C_1}{3C_1}=\frac{\sqrt{2}}{3}<\frac{1}{2}$$

Con los resultados obtenidos, podemos concluir que se trata de un filtro de banda ancha.